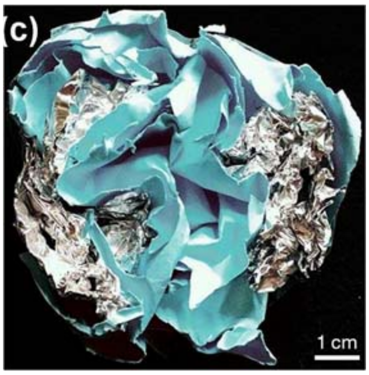
※無所不在的揉皺現象

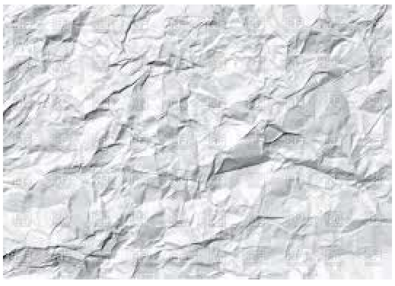
物理系洪在明

隨手取一張A4紙，如果左右、前後交替的對折折疊，你最多可以折疊幾次呢？若是認為紙張的面積越大，能夠折疊的次數越多，那你就錯了。因為即使換成和停機坪一樣大的布，且用壓土機來疊,仍然很難超過7摺；有人試過不同材質和軟硬，結果依然不變。如果那張紙是封求職拒絕信或分手信，你恐怕沒有耐心完成這個實驗，只想粗暴地將它揉爛丟掉。一般人或許不知道，揉皺的紙團具有神奇的抗力。你或許會覺得，紙團只要揉到不能再揉，就表示它內部不再有空隙（右圖是紙和鋁箔一起揉的剝面圖），壓起來硬邦邦的，有什麼奇怪？讓我們來作過實驗，將紙張換成鋁箔，用力揉到最小體積，然後丟到水中；你會驚奇地發現雖然鋁箔比重遠大於水，有超過一半高度的鋁箔團竟會浮出水面！



揉皺還有一個擾人的性質，那就是在演藝廳最討厭遇到的情況－旁邊的聽眾伸手到紙袋中取食物，所發出的噪聲。一般來說，最常發生的是沙沙作響的小噪音，大到會讓整排觀眾都聽見的超級大噪音則極少出現。經過嚴謹統計，科學家發現不同聲量E的脈衝(pulse)出現次數$N(E)$，竟然滿足地震的古登堡-芮克特定律 (Gutenberg-Richter law)：$N(E) \propto 1/E^{\beta}$。

1. 隨手取一張 A4 紙，左右、前後交替地對折n次，請問總厚度和n的關係是
   (A) 線性
   (B) 平方正比
   (C) 指數
   (D) 對數



2. 把揉過的紙團打開，會發現許多長短不一的摺痕，如果已知它們的平均長度和紙團半徑大致成正比，並且可以近似成反覆對摺出來的規則摺痕。請估計摺痕數目和紙團半徑成
   (A) 正比
   (B) 反比

(C) 平方反比

(D) 三次方反比

3. 把使勁揉皺過的鋁箔團丟到水中,發現超過一半高度的鋁箔團浮出水面。已知水的密度為10^3(kg/m^3)、鋁的密度為 2.7×10^3(kg/m^3)、空氣的密度約為1.2 (kg/m^3)，請利用阿基米德浮力原理,估計鋁箔團內部大約有多少空間是被空氣佔據：

(A) 10%

(B) 25%

(C) 50%

(D) 75%

4. 揉皺噪音來自紙張的凸凹面突然變凹凸。隨著紙越揉越皺，這些發聲的鼓面也會變小，假設這個過程可近似為摺疊，而且聲音強度E和面積成正比，則

摺疊次數 (n)	鼓面面積	鼓的張數或噪音的次數(N_n)	聲音強度(E)
0	1	1	1
1	1/2	2	1/2
2	1/4	4	1/4
n	$1/2^n$	2^n	$1/2^n$

把噪音的次數N_n當y軸，聲音強度E當x軸，不難看出穿過這些數據點的曲線滿足$y = 1/x$。但是如果某次考試剛好沒有人同分，單純把人數和成績作圖的數據點連起來，只會得到通過$y = 1$的水平線，那老師是怎麼看出成績分佈呢？答案是使用了長條圖(histogram)，先把每間隔 5 分（或 10 分）的同學數目加起來，才連線。在統計噪音次數時，這個間隔顯然必須遠小於1，但是你會發覺x越小（越弱的聲量），被這個間隔圍到的數據點越多，也就是它們的次數加起來會越大於2^n，因此可以預期最終的連線應該會比$1/x$來的陡。請估計最後得到的是：

(A) $1/x^{1.25}$

(B) $1/x^{1.5}$

(C) $1/x^{1.75}$

(D) $1/x^2$